Feuille n° 5 : Fonctions réciproques

1 Dérivée de fonctions composées

Exercice 1

1. La fonction $\mathbf{R}\setminus\{0\}\ni x\mapsto \ln|x|\in\mathbf{R}$ est-elle dérivable sur son domaine de définition ?

2. On considère l'expression
$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| .$$
Montrer qu'elle permet de définir une application f (dont on précisera le domaine de départ et le domaine d'arrivée).

3. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

2 Existence de fonctions réciproques

Exercice 2

On pose $D=\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Soit $f: D\to\mathbf{R}$ la fonction définie par
$$\forall x\in D\,,\quad f(x)=\frac{2x}{3x-1}\,.$$

1. Déterminer $f(D)$.

2. La fonction f est-elle injective ?

3. On considère $g: D\ni x\mapsto f(x)\in f(D)$. Expliquer pourquoi g est bijective et expliciter sa réciproque.

4. Esquisser les graphes de g et g^{-1} sur un même dessin.

Exercice 3

On pose $I=]-3,+\infty[$ et on considère $I\ni x\mapsto f(x)=5-12x-2x^2\in\mathbf{R}$.

1. Montrer que f est strictement croissante et réalise une bijection sur son image (bijection qu'on appellera encore f). Donner la bijection réciproque.

2. Esquisser le graphe de f et le graphe de son inverse sur un même dessin.

3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 4

On considère les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. **a.** Établir que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b).$$

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une bijection et donner l'expression explicite de sa bijection réciproque, notée argsh.

b. Calculer la dérivée de argsh.

c. La fonction $\mathrm{ch} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est-elle surjective, injective ?

d. On considère maintenant $\mathrm{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$. Montrer que la fonction est bien définie et qu'il s'agit d'une bijection dont on calculera la réciproque, notée argch.

e. Calculer la dérivée de argch.

4 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 5

Trouver des exemples numériques pour montrer qu'en général

$$\arctan(x) \neq \frac{\arcsin(x)}{\arccos(x)}.$$

Exercice 6

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(\arcsin(x))$, pour $x \in \mathbf{R}$,

2. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

3. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [\pi, 3\pi]$,

4. $\arcsin(\sin(x))$, pour $x \in [3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}]$,

5. $\cos(\arcsin(x))$,

6. $\sin(\arctan(x))$.

Exercice 7

Donner le domaine où les fonctions suivantes sont définies et dérivables et déterminer la dérivée sur ce domaine :

$$(a)\ f_1(x) = \frac{x}{\ln(x)} + \arcsin(x^2);\ (b)\ \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right);\ (c)\ \arccos(2x^2 - 1).$$

5 Suites réelles définies de manière implicite

Exercice 8

On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ par $f(x) = x + \ln(x)$, pour tout $x > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique $x_n \in]0, +\infty[$ tel que $f(x_n) = n$. Donner la valeur de x_1.

2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (x_n).

3. Étudier le signe de $f(n) - n$ pour tout entier $n > 0$. En déduire que $x_n \leqslant n$. Par une méthode analogue, montrer que $n - \ln(n) \leqslant x_n$.

4. En déduire, si elle existe, la limite de $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}}$.

Exercice 9

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_n(x) = x^5 + nx - 1\,.$$

1. a. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \exists\,! u_n \in \mathbf{R}, \quad f_n(u_n) = 0\,.$$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2. a. Calculer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n.

b. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

3. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0, 1]$.

b. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\ell = 0$.

Exercice 10

On définit la fonction $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ par $f(x) = x \exp(x)$, pour tout $x > 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique $u_n \in]0, +\infty[$ tel que $f(u_n) = n$.

2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite (u_n).